Statistika 2 – teorija

# Ocenjevanje v linearnih modelih

Splošni linearni model: , kjer je proučevani slučajni vektor, fiksna matrika modela (''design matrix''), vektor parametrov in vektor slučajnih odstopanj, za katerega (vedno) privzamemo

* Komentar: v ''realnem'' življenju je tudi matrika slučajna, ampak je model s slučajno veliko zahtevnejši, zato privzamemo fikcijo ''laboratorijskega eksperimenta''

Zgled: standardna linearna regresija

Ena formalizacija približne linearne zveze

Zgled: večvzorčni linearni model

Vsi imajo pričakovano vrednost , imajo pričakovano vrednost ,…

Če privzamemo , gre za normalni homoskedastični model za neodvisnih vzorcev s pričakovanimi vrednostmi

Zgled: drugačna parametrizacija večvzorčnega linearnega modela

Včasih model iz prejšnjega zgleda drugače parametriziramo, in sicer nadomestimo , kjer je neka ''skupna'' pričakovana vrednost, za , pa menimo, da so ''majhni''

Preizkus glavne domneve homogenosti iz prejšnjega zgleda, se tu glasi

Formalno gre za

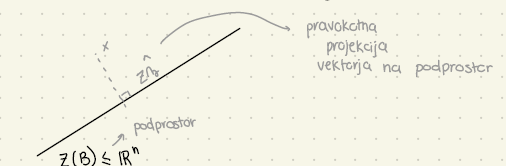
Če porazdelitev vektorja (normalno) parametriziramo, ta model poznamo pod ''ANOVA z enojno klasifikacijo'' (''one-way ANOVA'')

Zgled: mešani linearni model

, kjer sta in fiksni matriki, vektor (parameter modela) se imenuje vektor fiksnih učinkov, slučajni vektor pa se imenuje vektor slučajnih učinkov – slednji je neopazljiv

Če definiramo in privzamemo (kot je v tej teoriji običajno), da sta in neodvisna, je

Če privzamemo in , dobimo , kar je tipično nediagonalna matrika

Zanima nas splošni linearni model (''general linear model'') , kjer nima nujno polnega ranga in ni nujno diagonalna

Naj bo , kjer je neki vektorski podprostor v . Ocena za pri dani realizaciji vektorja po metodi najmanjših kvadratov (MNK) je (kateri koli) vektor , za katerega velja

* S to zahtevo je vektor enolično določen: to je pravokotna projekcija vektorja na podprostor
* Če ima jedro, potem ni enolično določen – namesto lahko vzamemo za   
  + Spomnimo se, da je vedno
* MNK formalizira intuicijo
* ''Problem'' neenoličnosti vektorja bi lahko rešili z reparametrizacijo, npr. namesto bi lahko vzeli kateri koli , za katerega je

**Konstrukcija konkretne izbire za**

Privzemimo . Vektor je določen z zahtevo oz.   
 za vse , od koder sledi oz.

* Pripomnimo, da sledi , če ima poln rang
* Pripomnimo, da je

Konstrukcija katere koli rešitve za temelji na konkretni izbiri ''posplošenega inverza''

Pišimo , kjer so stolpci. Na njih izvedemo Gram-Schmidt (G-S) ortogonalizacijo. Rezultat bo paroma ortogonalnih vektorjev , ki jih dobimo po spodnjem postopku

Privzemimo, da že imamo , ki napenjajo . korak v G-S ortogonalizaciji se glasi . Obdržimo ga, če , sicer postavimo

Velja zveza . To pomeni , kjer je   
 in je zgornjetrikotna matrika s pozitivnimi števili po diagonali

* Posledično je obrnljiva

Izračunajmo , kjer je (to so same enke in ničle)

Definiramo . To matriko imenujemo posplošeni inverz matrike

Končno naj bo . To je dobro definirana funkcija realizacije

Pokažimo, da reši enačbo : . Upoštevamo še, da velja in dobimo

**Lastnosti dobljene cenilke :**

Vprašamo se, katere linearne funkcije parametra lahko nepristransko linearno ocenjujemo. Naj bo , kjer je linearna preslikava, ocenjevana funkcija. Privzemimo, da je nepristranska linearna cenilka za . Tedaj je po eni strani zaradi nepristranskosti, po drugi strani pa zaradi linearnosti. Sledi , kar pomeni, da lahko linearno nepristransko ocenjujemo le funkcije od

* Trdimo, da je tedaj tudi linearna nepristranska cenilka za
* To pomeni, da lahko nepristransko ocenjujemo funkcije vektorja

Izpišimo , kjer so vrstice, pa stolpec

Izračunajmo: , kar je linearni funkcional za , ki jo lahko ocenjujemo

Vidimo, da je , to med drugim pomeni, da lahko linearno nepristransko ocenjujemo funkcionale , kjer je

Za splošno zapišimo še , kjer so vsi oblike

Gauss-Markov izrek: naj za splošen linearni model velja in . Tedaj ima cenilka med vsemi linearnimi nepristranskimi cenilkami za enakomerno najmanjšo varianco

* Za normalni model smo pokazali več kot samo to, ampak predpostavka normalnosti je   
  velika – tega tukaj ne prevzamemo

Dokaz Gauss-Markovega izreka

Naj bo druga linearna nepristranska cenilka za

Kot naprej takoj sledi, da je ()

Fiksirajmo . Trdimo, da je

Velja , kjer je večkratnik identične matrike

Trdimo torej, da velja

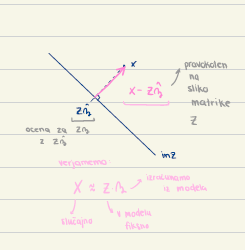
To pomeni ali drugače

Dovolj je pokazati

Tu je

## Ocenjevanje v normalnem linearnem regresijskem modelu

Tu privzamemo model , kjer je . Ta model je parametričen (kjer parametri porazdelitve ne določajo nujno enolično) s prostorom parametrov

Seveda je . Zapišimo

Obravnavajmo:

* je vsota kvadratov residualov (VKR) – želimo , da je majhna, meri prilagojenost modelu

Po F-N sledi, da je zadostna statistika

Vidimo, da je pravzaprav , kjer je   
 in

Ker je polnega ranga, je kompletna zadostna, ker (bijektivna korespondenca) je tudi taka

V tem modelu je statistika NCEND za , kjer je . Dalje sta in neodvisni

* Posledica: je v tem modelu NCEND za

Dokaz izreka

Naj bo ortogonalna matrika, za katero velja , ostalih stolpcev matrike pa določimo z dopolnitvijo do ON-baze

Sledi

Posebej iz sledi

Dalje je in sledi

Pripomnimo še

# Ocenjevanje za velike vzorce

## Konvergenca slučajnih vektorjev

Naj bodo slučajni vektorji z vrednostmi v , ki so definirani na skupnem verjetnostnem prostoru (npr. ). Tedaj definiramo:

* , če
* , če
* , če
* , če ta vsak , kjer je komulativna porazdelitvena funkcija zvezna

vsako podzaporedje od ima nadaljnje podzaporedje, ki k konvergira skoraj gotovo

Cramer-Wald pravilo:

Iz skoraj gotove in -konvergence sledi konvergenca v verjetnosti, iz nje pa konvergenca v porazdelitvi

Če je konstanten vektor, velja

Naj bodo slučajni vektorji z vrednostmi v in naj bo zvezna s.g. glede na :

* (vseeno ali po komponentah ali cel vektor)
* (važno, da cel vektor, ker potrebujemo s.g. zvezno funkcijo, da deluje)

Izrek Sluckega: naj bodo slučajne spremenljivke in naj bo . Privzemimo   
 in . Tedaj:

Posledica: 2. in 3. točka veljata tudi, ko so vektorji

Zgled: klasični CLI

Klasični (enorazsežni) CLI pravi

Če upoštevamo , sledi , ko

Slucki: , ko

Opomba: , ko (KZVŠ) in

Dokaz 2. točke izreka Sluckega

Cramer-Wald

Osnovna konvergenčna izreka sta KZVŠ (krepki zakon velikih števil) in CLI (centralni limitni izrek). Pomembne konvergence tipično dobimo z njima in uporabo zveznih ali gladkih transformacij

Naj bodo slučajni vektorji z vrednostmi v , naj bo konstanta, naj bo   
 zaporedje, za katero je . Privzemimo, da je Borelova funkcija, ki je odvedljiva (diferenciabilna) pri in velja . Če velja , ko   
, potem velja , ko

Dokaz:

Spomnimo se na aproksimacijo 1. reda za funkcijo okrog :   
, kjer je

Naj bo . tedaj

Pišimo

Najprej trdimo, da . To pomeni mora biti

Pokažimo, da velja . Dovolj je pokazati  
. Iz tega sledi

Iz in po izreku Sluckega sledi , od koder sledi in

Iz zaradi zveznosti sledi , pri pogoju, da je zvezna v

če obstaja zaporedje , ki konvergira k 0, je zvezna v . Ker neenakost velja za vse , sledi

Iz zaradi zveznosti sledi , ko

Iz in po izreku Sluckega sledi

Posledica (metoda ): če pri privzetkih tdritve velja , dobimo   
, kjer je

Zgled: CLI in metoda

Naj bodo NEP slučajne spremenljivke s pričakovano vrednostjo in disperzijo

Klasični CLI:

Metoda za :

### Osnovna limitna izreka

Krepki zakon velikih števil (KZVŠ): naj bodo NEP slučajni vektorji (definirani na skupnem prostoru) s pričakovano vrednostjo . Tedaj , ko

Centralni limitni izrek (CLI): privzemimo še skupno varianco , ki je obrnljiva. Tedaj   
, ko

Posledica CLI:

* Za velja

Zgled: kategorična porazdelitev

''Kategorično'' porazdelitev ''formaliziramo'' , kjer so   
 (1 na -tem mestu). Če pišemo , so porazdeljene Bernoullijevo in za vse . Sledi

Sledi

Če so neodvisne replikacije slučajnega vektorja , je   
, kjer je število pojavitev vektorja (oz. število kategorij ) v vzorcu (za )

CLI:

Ker je naš vzorec razumno velik, lahko uporabimo asimptotične metode

### Doslednost

#### NEP vzorčenje slučajnih spremenljivk

Naj bodo NEP replikacije dane slučajne spremenljivke, katere porazdelitev pripada množici dopustnih porazdelitev . Naj bo ocenjevana funkcija. Zaporedje cenilk je:

* Krepko dosledno za , če velja
* Šibko dosledno za , če velja
* -dosledno za , če velja

za in za vsako zaporedje NEP slučajnih spremenljivk, za katere za vse

V ''klasični'' frekventistični statistiki je slučajna spremenljivka, ki jo želimo replicirati. Definiramo in

Šibki zakon velikih števil (ŠZVŠ) Markova: naj bodo paroma nekorelirane slučajne spremenljivke s skupno pričakovano vrednostjo in disperzijami , za katere je   
. Tedaj velja , ko

Dokaz ŠZVŠ Markova:

Zgled: zdravilo za holesterol

(vzorec) je razlika nivojev holesterola LDL pred in po zdravljenju na -tem bolniku iz vzorca

Želimo oceniti ''povprečno učinkovitost našega zdravila''

Filozofski privzetek je za vse . V konkretnem vzorcu imamo 6145 meritev

#### Doslednost v splošnem (okvir za asimptotične izreke)

Naj bodo (ali ) družine (dopustnih) porazdelitev na   
(ali ), ki so usklajene v smislu . Model je parametričen, če za neko velja (bijektivna korespondenca) za vse

Zgled: linearna regresija

Obravnavamo linearno regresijo (za neskončne vzorce) , kjer . Pišimo (kjer je -ta vrstica matrike ) ter . Tedaj velja

Zanimivi modeli za zgornji zgled:

1. ; usklajenost sledi iz dejstva
2. (kot v izreku Gaussa in Markova)

Zaporedje cenilk za zaporedje je:

* (šibko) dosledno, če velja
* -dosledno (SKN-dosledno), če

za vse (usklajene) dopustne in vse , za katere

Pripomnimo, da iz SKN-doslednosti sledi doslednost:

Zgled:

Za privzemimo model . Dalje privzemimo, da je rang za . tedaj lahko ocenjujemo z nepristranskimi cenilkami

Fiksirajmo neki in pišimo namesto . Razcepimo , kjer je   
 in za

Vemo, da je

Naj za simetrično matriko pomeni najmanjšo, pa največjo lastno vrednost. Vidimo   
 in če , je dosledno zaporedje cenilk za v modelu

Pogoj bomo komentirali kasneje

Naj bo vektor stolpec. Tedaj (sled)

Dokaz:

Naj bo statistika in slučajni vektor z vrednostmi v . Tedaj velja

Dokaz:

Naj bo simetrična matrika in vektor. Tedaj je

Dokaz:

:

Sledi

Privzemimo model . Naj bodo posplošeni inverzi za . Naj velja   
 in . Naj bodo matrike in naj velja še   
 ali (slednje velja za iz predavanj) ter . Tedaj je zaporedje cenilk   
 SKN-dosledno za

* Dostavek: če imajo poln rang za vsa dovolj velika števila , je   
   in pogoj je avtomatično izpolnjen; ocenjujemo   
  (ali kar )
* Če je , je

Dokaz:

Naj bo standardni -ti enotski vektor. Potem velja , saj je omejena, in je omejen

Privzemimo, da so vrstice NEP realizacije slučajnega vektorja z vrednostmi v in se spomnimo, da za simetrično matriko velja :

* KZVŠ:

### Asimptotična normalnost

#### NEP vzorčenje

Naj bodo slučajni vektorji z vrednostmi v NEP z neko porazdelitvijo . Zaporedje cenilk za ocenjevane funkcije je asimptotično normalno, če obstajajo funkcije z vrednostmi v pozitivno definitnih matrikah, tako da velja  
, ko gre

Zgleda: CLI

1-razsežni CLI:

-razsežni CLI: , če so razsežnosti

Na podlagi CLI in metode dobimo nadaljnje zglede asimptotične normalnosti

Zgled: 1-razsežni CLI

Privzemimo standardni 1-razsežni CLI, kjer . uporabimo metodo za funkcijo in dobimo , ko

Izpeljimo približno ''območje'' zaupanja za :

* oz.
* Izrek Sluckega:
* Naj za velja . To pomeni
* Gre za dogodke
* Vidimo, da je interval zaupanja za , ki doseže stopnjo zaupanja v limiti
* Širina tega intervala zaupanja je . Enakomerno najožji interval zaupanja bomo dobili pri minimalni razliki (ob vezi ), to je

#### Asimetrična normalnost v splošnem

Naj bodo (za ) usklajeni modeli za vzorce velikosti ( so družine verjetnosti na ). Zaporedje cenilk za ocenjevane funkcije je asimptotično normalno, če obstajajo funkcije pozitivno definitne matrike, da velja   
 ko , za vsako usklajeno zaporedje in vsako zaporedje , za katero je

Za , kjer privzemimo model (slučajna odstopanja so neodvisna, homoskedastična, t.j. (ne pa nujno normalna)). privzemimo, da zaporedje konvergira k neki pozitivno definitni matriki. Posebej sledi, da je za vsa dovolj velika števila ; tedaj lahko nepristransko ocenjujemo z   
, kjer je . To zaporedje (nepristranskih cenilk za ) je asimptotično normalno: velja

## Konstrukcija cenilk

### Metoda momentov (MM)

Privzemimo, da repliciramo slučajno spremenljivko s parametričnim modelom s prostorom parametrov . Privzemimo obstoj momentov (za vse ). Privzemimo, da ima enačba rešitev v funkcijski obliki

Metoda momentov: ocenjujemo z , kjer so standardne cenilke za momente. Te so po KZVŠ krepko dosledne za . Če je zvezna, je (krepko) dosledno zaporedje cenilk za

Asimptotična normalnost: definirajmo ; to so NEP slučajni vektorji s pričakovano vrednostjo

; obstaja, če obstajajo momenti   
redov

CLI: , kjer je

Metoda pove . To pomeni, da je (pri razumnih predpostavkah) zaporedje   
 tudi asimptotično normalno

### Metoda največjega verjetja (MNV)

Privzemimo parametrični model s prostorom parametrov za proučevani slučajni vektor z vrednostmi v . Privzemimo obstoj gostot glede na neko -končno mero . Funkcija verjetja je , ki jo razumemo kot funkcijo parametra. Spomnimo se:

1. Če za dano realizacijo in velja , pravimo, da je ocena za pri realizaciji po MNV
2. Če obstaja za -skoraj vse , je cenilka največjega verjetja za
3. Če je CNV za in je je CNV za

Zgled: enorazsežni normalni model

Naj bodo NEP,

ta doseže minimum v

Pri fiksnem ima maksimum v – ta funkcija ima maksimum v , če

Zgled: večrazsežni normalni model

Naj bodo NEP, (simetrične pozitivno definitne matrike velikosti )

ta doseže minimum v (gre za konveksno kvadratno formo)

Pri fiksni ima maksimum v

Zapišimo

Velja torej ta izraz ima maksimum   
(po ) v (če je to s.p.d.; če je je to res -s.p.

Privzemimo parametrični model in naj bo zadostna statistika. Po F-N je   
 (-s.g.)

Vidimo, da je problem maksimizacije po ekvivalenten problemu maksimizacije funkcije   
. Če CNV obstaja, lahko privzamemo (če CNV obstaja, ni nujno enolična)

Log-verjetje je logaritmično verjetje . Ker je logaritem strogo naraščajoča funkcija, je maksimizacija enakovredna maksimizaciji . Če je (zvezno) parcialno odvedljiva na vse , so stacionarne točke rešitve (vektorske) enačbe (logaritemska enačba verjetja, LEV)

## Logistična regresija

Proučujemo slučajno spremenljivko z binarnim izidom. Mislimo si, da je izid ''odvisen od'' napovedovalnih spremenljivk

, kjer - klasična linearna regresija ni smiselna

Pri logistični regresiji modeliramo , kjer je primerna bijekcija. Tu obravnavamo

* V splošnem funkciji pravimo povezovalna funkcija

Za model za vzorec velikosti postopamo takole: naj bo fiksna matrika in naj bodo neodvisne Bernoullijeve slučajne spremenljivke. oz. . To je parametrični model s prostorom parametrov

Zanima nas : , kjer je realizacija vektorja .

Preoblikujemo:

Sledi za abstraktno povezovalno funkcijo

Za je in . Gre za eksponentni model polnega ranga s kompletno zadostno statistiko

LEV: . Pri tem smo uporabili privzetke, da je polnega ranga, in ter izračunali inverzni   
:

Za najprej izračunamo

Sledi in posledično

Vidimo, da je povsod , torej je konkavna. To pomeni, da v kolikor obstaja stacionarna točka, je le-ta maksimum (ni pa nujno, da vedno obstaja)

## Abstraktne lastnosti CNV v eksponentnih modelih

Privzemimo parametrični model s , ki zadošča . Gostote zadoščajo :

Funkcija zbira:

Ker je , je

Posledično je

Enakost odvajamo še enkrat:

To pomeni (negativna simetrična matrika) je negativna v pričakovani vrednosti

Apliciramo na splošen eksponentni model: , kjer je odprta, diferenciabilna in

: :

Če je injunktna : verjetnost (torej je model polnega ranga in posledično je kompletna). Sledi vzorec reducira pričakovano vrednost (pri parametru, ki je ocena MNV)

* je tu slučajen
* MNV poišče gostote z maksimalnim verjetjem
* V eksponentnih modelih polnega ranga je tudi pričakovana vrednost pri parametru ocenjenem z MNV realizirana iz vzorca

Odvajamo še enkrat:

Vstavimo :

Komentar: če vstavimo za izraz za , dobimo je lokalni maksimum (tipično)

Če privzamemo, da je in je , je in je pri konkavna

Posebni primeri:

1. **Naravno parametriziran eksponentni model:** to je tak eksponentni model, pri katerem je in . Tedaj imamo, :  
    in . Če je povsod , je strogo konkavna in rešitev () je kvečjemu ena – če obstaja, je globalni maksimum
2. **Transformiran naravno parametriziran eksponentni model:** to je tak eksponentni model , kjer je in je difeomorfizem. Če je tako, lahko reparametriziramo z naravnim parametrom . V tem modelu je seveda   
    za vse za vse . Ker se in razlikujeta le za difeomorfizno reparametrizacijo, so stacionarne točke in ekstremi v bijektivni korespondenci

* Posebej: ima kvečjemu eno stacionarno točko in če jo ima, je to avtomatsko naksimum
* Komentar: privzeti moramo, da je konveksna odprta množica. Enačbi () in ()   
   sta seveda ekvivalentni

Zgled: posplošeni linearni model brez disperzijskih parametrov

Tu imamo vzorec neodvisnih -vektorjev, katerih porazdelitve pripadajo modelu   
 in sicer , kjer

Parametri so povezani z linearnim parametrom preko zveze , kjer difeomorfizem imenujemo povezovalna funkcija, pa so fiksne matrike

Velja

(Pri logistični regresiji smo imeli in vzeli )

Poseben primer je, ko je in je difeomorfizem, ter vzamemo kar . Temu rečemo kanonična povezovalna funkcija

Tedaj je in je kompletna zadostna statistika. To je naravno parametriziran eksponentni model

, kjer je

Posplošeni linearni modeli niso NEP modeli

### Asimptotične lastnosti CNV

Naj bodo NEP -vektorji z gostotami , kjer . Privzemimo, da vsakima različnima parametroma pripadata različni porazdelitvi. Dalje naj velja:

* je neodvisna od
* je dovoljkrat zvezno parcialno odvedljiva (recimo 3x)
* V peščici primerov lahko zamenjamo
* je pozitivno definitna za vse
* Velikost je razumno kontrolirana

Tedaj obstaja zaporedje slučajnih vektorjev , za katero velja:

1. , ko (doslednost)
2. (asimptotična normalnost)

Pripomnimo, da za posplošeni linearni model brez disperzijskih parametrov pri ''smiselnih'' predpostavkah (npr. ) obstaja zaporedje cenilk , za katerega velja:

# Preizkušanje domnev

Spomnimo se: model razdelimo na . Pri tem nas včasih zanimajo alternative   
 ali pa

Če je model parametriziran , potem in

Preizkus domneve je (odločitveno) pravilo, po katerem na podlagi realizacije proučevanega slučajnega vektorja domnevo bodisi zavrnemo, bodisi je ne zavrnemo

Informacija o napakah 1. vrste in 2. vrste je zakodirana v funkciji moči , kjer je , če na realizaciji domnevo zavrnemo z verjetnostjo

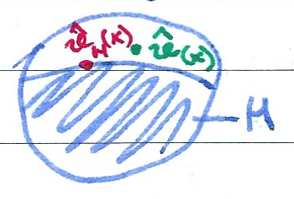
Pri nerandomiziranih preizkusih je

Poznamo že teorijo enakomerno najmočnejših preizkusov. Včasih taki ne obstajajo na vsej , pač pa za določene tipe podmnožic

## Preizkušanje na podlagi (posplošenega) razmerja verjetij

Obravnavamo parametrični model s prostorom parametrov in domnevo . Naj bo   
 funkcija verjetja. Posplošeno razmerje verjetij je ,

Vedno lahko preizkušamo za primerno konstanto



Teoretično ''določimo'' z zahtevo velikosti preizkusa (kontrola napake 1. vrste). Pri vseh dopustnih konstantah bi vzeli tisto, ki ima največjo možno velikost preizkusa (). To je v praksi tipično težko

Glavna vrlina preizkušanja na podlagi razmerja verjetij je obnašanje za velike vzorce

Wilksov izrek: privzemimo NEP vzorčenje slučajnih spremenljivk z gostotami , za katere velja:

* je gladka mnogoterost (npr. odprta množica v )
* je zaprta gladka podmnogoterost
* Veljajo regularnostni privzetki za kot funkcijo (dovoljkrat zvezna diferenciabilnost,…)

Tedaj za velja

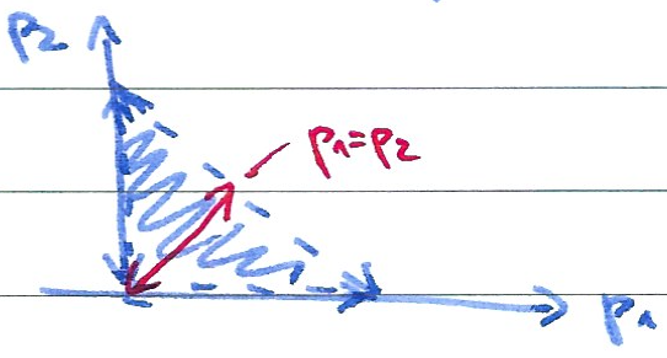
### Preizkušanje (čisto določene) diskretne porazdelitve

Privzemimo, da vzorčimo NEP

Parametrični prostor je . Seveda je -razsežni simpleks

Oglejmo si zanimive domneve v primeru :

* : primerno za Wilksov izrek,
* primerno za Wilksov izrek,
* : primerno za Wilksov izrek,



Spomnimo se, da je CNV podana kot , kjer je frekvenca pojavitev vrednosti v vzorcu

Spomnimo se:

Preizkus čisto določene porazdelitve z razmerjem verjetij: : enostavna domneva,

Domnevo zavržemo, će

Velja

Izpišimo . Spomnimo se   
. Sledi , ko (pri ). Izkaže se, da tudi , ko (pri ).

### Preizkus neodvisnosti

Zgled: pitje piva

Zanima nas, ali je pitje piva povezano s spolom. Imamo 4 verjetnosti: (ženska in pije pivo), , za katere velja

Parametrični prostor je trirazsežnostni simpleks

Velja in

V primeru neodvisnosti:

Domneva neodvisnosti je dvoparametrični podprostor v tetraedru. Gre za gladko ploskev – lahko uporabimo Wilksov izrek

''Izhodiščni'' verjetnostni prostor razdelimo na dva načina: . Za dani pišemo

Parametrični prostor je simpleks razsežnosti

Pišimo še . Domneva neodvisnosti teh razčlenitev: oz.

. Vidimo, da je

Izračunajmo še

Wilksov izrek: ko (pri )

Za realizacijo naj označuje frekvenco pojavitev para v vzorcu. Dalje naj bosta   
 () in (). Te statistike predstavimo v kontingenčni tabeli:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| \ |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Verjetje: CNV: (poseben primer NEP vzorca iz diskretne porazdelitve na fiksnih končno mnogo točkah)

''CNV'' na domnevi neodvisnosti : supremiziramo vsak sumand posebej in po že znanem sledi ()

Razmerje verjetij:

Preizkus pri limitni stopnji značilnosti (velikosti) :

Uporabimo še aproksimacijo 2. reda

Dobimo (pri )

Če velja , velja ko

Izrek Slitskega implicira (pri )

### Hi-kvadrat preizkus homogenosti

Zgled: terapija

Preizkušamo terapijo s prirejenimi verjetnostmi:

* je verjetnost izboljšanja stanja
* je verjetnost nespremenjenega stanja
* je verjetnost poslabšanja stanja

Velja

Zanimajo nas vektorji v štirih neodvisnih skupinah . Če vektorje označimo , je temeljna domneva homogenosti

Pripomnimo, da je

Proučujemo diskretno porazdelitev v neodvisnih skupinah – gre torej za   
. V vsaki imamo neodvisne vzorce iz vsake skupine, v -ti imamo realizacije NEP slučajnih spremenljivk

Naj bo frekvenca pojavitve kategorije v skupini . Tedaj oz.

Statistike predstavimo v tabeli:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Če velja domneva homogenosti, pričakujemo

CNV:

* Imamo problem z vezami
* Nastavimo pogoj za ekstremalo so vezi in za vse
* Seštejemo po vseh :

Supremizacija po : že vemo

Razmerje verjetij:

Preizkus pri limitni velikosti :

* Limitno pomeni

Asimptotično ekvivalentni (pri ) preizkusni statistiki:

## Neparametrično preizkušanje

Gre za preizkušanje v modelih, ki jih ne znamo parametrizirati ali zares niso parametrični ali pa je (''znana'') parametrizacija kompleksna

### Redukcija na parametrični model = preizkus z znaki

Zgled: terapija

Naj bo razlika vrednosti nekega parametra pred terapijo in po njej. Privzemimo, da je ''uspešnost'' terapije sorazmerna z vrednostjo . Želeli bi preizkušati domneve v zvezi z , ampak (glede na podatke od prej) za nimamo primernega parametričnega modela

Označimo – s tem model za '''' reduciramo na parametrični model za

Izkaže se, da imamo na voljo dobre preizkuse katere koli od domnev

Naj bodo frekvence pojavitev v vzorcu . Velja

Trdimo

* Pripomnimo še in

Preizkus domneve : , kjer je

Ta preizkus ima stopnjo značilnosti : privzemimo :

Simetrično zavrnemo pri stopnji značilnosti , če , kjer je

Obravnavajmo še

Spomnimo se: naj bodo NEP in . C-P preizkus proti je ekvivalenten preizkusu , kjer   
 in

Ker je in velja , zavrnemo   
 pri stopnji značilnosti , če ali , kjer je   
 ali ekvivalentno

Preizkus z znaki ima tudi popularno asimptotično različico. Pišimo NEP,

CLI: ko

Po izreku Sluckega lahko in v imenovalcu lahko nadomestimo z ocenama. Pri dobimo ko . Tedaj zavrnemo:

* , če
* , če
* , če

Ti preizkusi imajo limitno velikost

### Ranžirni preizkusi

Gre za preizkus s predznačenimi rangi (Wilcoxon signed-rank test)

Zgled: terapija

Kot pri preizkusu z znaki, naj bo razlika med vrednostma nekega ''parametra'' pred in po terapiji. Recimo, da je večja vrednost tega parametra ''ugodnejša''. Želeli bi preizkušati , ampak nimamo (dobrega) preizkusa. Če privzamemo, da ima zvezno porazdelitev, ki je simetrična okrog neke ''lokacije'' , imamo na voljo dobre preizkuse domnev

Slučajna spremenljivka je simetrična okrog , če , oz.

Lastnosti simetrične slučajne spremenljivke:

1. je mediana
2. Če je zvezna, je
3. Če ima pričakovano vrednost, je
4. Če ima gostoto, je simetrična okrog

Zgled: terapija

Preizkus terapije na 8 prostovoljcih:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Prej | 25 | 28 | 32 | 18 | 15 | 18 | 25 | 31 |
| Potem | 37 | 26 | 47 | 25 | 29 | 22 | 19 | 32 |
|  | -12 | 2 | -15 | -7 | -14 | -4 | 6 | -1 |
|  | 12 | 2 | 15 | 7 | 14 | 4 | 6 | 1 |
| Rang | 6 | 2 | 8 | 5 | 7 | 3 | 4 | 1 |
| Poz. |  | 2 |  |  |  |  | 4 |  |

vsota ''pozitivnih rangov''

Opomba: želimo dokazati, da , torej zavrniti

Pri bi pričakovali, da je , kjer je vsota vseh rangov

Preizkus:

* zavrnemo, če je , pri čemer določimo na podlagi
* Alternativo zavrnemo, če je -vrednost
* -vrednost, kjer je verjetnost pri

( število vseh možnih naborov pozitivnih rangov), ker je verjetnost, da bo rang pozitiven ali negativen in so vsi nabori enako verjetni

Za katere nabore je ? – to je 14 naborov izmed 256 na tem vzorcu domneve ne bi zavrnili

Definirajmo po komponentah: . Dalje naj bo   
. Lahko izrazimo

Če so različne, obstaja natanko ena permutacija , da zanjo velja   
. Tedaj je in zato

Naj bo od zdaj naprej vzorec NEP slučajnih spremenljivk s skupno kumulativno porazdelitveno funkcijo . Tedaj so z verjetnostjo 1 vse komponente in različne. V tem modelu je zadostna statistika (tu je vrstilna statistika)

Porazdelitev statistike temelji na izračunu verjetnosti za vse in strogo naraščajoče

Definirajmo . Naprej

Privzemimo še, da ustreza porazdelitvi, ki je simetrična okrog 0. Tedaj velja   
 zaradi tega ne potrebujemo -jev, od koder potem sledi   
, kar je neodvisno od in

Ugotovili smo torej, da je

Izračunajmo

Podobno izračunamo

Povzemimo: naj bo slučajni vektor, kjer so NEP zvezne slučajne spremenljivke   
(s skupno kumulativno porazdelitveno funkcijo ). Domneve:

Domneve zavračamo, če so vrednosti statistike :

1. Preveč stran od :
2. Prevelike:
3. Premajhne:

Tu ustrezno konstanto določimo na podlagi zahteve

V praksi zavračamo preko -vrednosti na danem vzorcu (torej, če je -vrednost ).   
-vrednosti so:

Ti preizkusi se (v smislu moči) najbolje obnašajo na simetričnih alternativah

Tak preizkus velja za alternativo parnemu -preizkusu v neparametričnih zveznih modelih

Verjetnosti ustrezajo številu razbitij . To je mogoče računati s preprostim rekurzivnim algoritmom, ki pa je že za ''srednje velike'' računsko intenziven. Za taka števila uporabljamo asimptotično različico, ki temelji na (pri simetričnosti okrog 0). Tedaj zavračamo, če:

### Wilcoxonov dvovzorčni preizkus

Zgled: terapija

Na isti ''populaciji'' preizkušamo dve terapiji, katerih uspešnost je sorazmerna neki merjeni količini

Na ''populaciji'' hipertenzikov preizkušamo dve zdravili. Uspešnost vsakega merimo z razliko SKT pred terapijo in po njej

Proučevani slučajni vektor ima obliko , kjer so vse komponente neodvisne zvezne slučajne spremenljivke in NEP z zvezno k.p.f. ter NEP z zvezno k.p.f. . Naj bo   
 ''ranžirni vektor''. Zaradi predpostavke zveznosti, so vse komponente z verjetnostjo 1 različne

Pišimo . Za in velja  
 (invariantnost). Posebej velja

Pri privzetku obstoja in , bi nas zanimale domneve

Tu je torej osnovna domneva, ki jo zasledujemo, seveda . Preizkušali jo bomo s statistiko   
 (vsota rangov, ki pripadajo ''-om'')

Pri je sestavljen iz NEP komponent (v celoti). Zato velja  
, kjer je in   
 strogo naraščajoča

Sledi

Odstopanje vrednosti od razumemo kot odstopanje od domneve

Dalje računamo

Sledi

Vrednosti slučajne spremenljivke k.p.f. so stohastično manjše od vrednosti slučajne spremenljivke k.p.f. , če velja

* Tu sta in zvezni
* Posebej pomemben primer je zamik v lokaciji za neko število . Če imata taki porazdelitvi gostoti, velja

Naj bo tako in naj bosta in neodvisni. Velja , kjer sta in neodvisna in porazdeljena s k.p.f.

Posplošitev tega računa pokaže, da so za vrednosti manjše od , za pa večje

Zato domnevo pri dvostranski alternativi ali zavračamo, če , domnevo proti alternativi zavračamo pri , domnevo proti pa zavračamo pri

* Za domnevo je enako navzgor ali navzdol zaradi simetrije pri :

Tehnično uporabljamo -vrednosti pri , kar se reducira na štetja razbitij (kjer je in fiksen), ali asimptotične preizkuse, ki temeljijo na (pri )